

PRIMITIVNI FUNKCE (necessity/ integrace)

I. Definice: Funkce F je primitivni funkce k f na intervalu (a,b) , kdyz platí

$$\underline{F'(x) = f(x), x \in (a,b)}$$

II. Existence:

1) f je spojita funkce na $(a,b) \Rightarrow$ na (a,b) existuji k f primitivni fce

2) F, G jsou primitivni k f na $(a,b) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ tak, ze

$$G(x) = F(x) + c, x \in (a,b),$$

tedy, k f existuji nekonecne mnoho primitivnich funkcii (pokud ved' f na (a,b) primitivni fce) a kazde' dve' se liši o konstantu;

zovime
$$F(x) + c = \int f(x) dx$$

(necessity/ integrace)

III. Vysvet

A) Tabulka integrace:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1 \quad x \in \mathbb{R} \ (y \in \mathcal{D}(x^\alpha))$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$$

$$\int e^x dx = e^x + c, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, x \in (-1,1)$$

B) Je-li $\int f(x)dx = F(x) + C$ na intervalu J , pak

$$(a \neq 0) \quad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (\text{na odpovídajícímu intervalu})$$

Pr. $\int e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} e^{3x+1} + C, x \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{2-5x} dx = -\frac{1}{5} \ln|2-5x| + C, x \neq \frac{2}{5}$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{2} \arctan(2x) + C, x \in \mathbb{R}$$

c) Vlastnosti neurčitých integrálů, které lze využít při výpočtu
(f, g spojité v (a, b))

$$1) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, x \in (a, b)$$

$$2) \int c f(x) dx = c \int f(x) dx, x \in (a, b)$$

Pr. $\int \frac{x-1}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + C$
 $x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int 1 dx - \int \cos 2x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + C = \frac{1}{2} (x - \sin x \cdot \cos x) + C, x \in \mathbb{R}$$

D) Integrace per partes (f', g' spojité v (a, b))

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \quad v(a, b)$$

Pr. 1) $\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} f' = \sin x, f = -\cos x \\ g = x, g' = 1 \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x dx =$
 $= -x \cos x + \sin x + C$

$$2) \int \ln x dx = \int 1 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} f' = 1, f = x \\ g = \ln x, g' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$x \ln x - x + C$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t \cdot 2t}{t^2+1} dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt =$$

$$= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \underline{2(t - \arctan t) + C} = \underline{2(\sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}) + C}$$

ještě několik příkladů z I:

$$3) \int \frac{k}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \underline{\sqrt{1+x^2} + C, x \in \mathbb{R}}$$

$$4) \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \left| \begin{array}{l} g(x) = t \\ g'(x) dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln|g(x)| + C,$$

$x \in (a,b), g, g' \text{ spojité v } (a,b), g(x) \neq 0 \text{ v } (a,b)$

$$5) \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln(1+x^2) + C,$$

$x \in \mathbb{R}$

(některé přímo podle vzorce v příkl. 4)

F) Integrace racionálních funkcí

1) jednoduché (parciální) zlomky

$$(i) \int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C, \quad x \neq a$$

$$(ii) \int \frac{1}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C, \quad x \neq a$$

$n > 1, n \in \mathbb{N}$

$$(iii) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} dx =$$

$p^2 - 4q < 0$

$$= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + C \int \frac{1}{y^2+1} dy$$

(viz příklad dále)

$$\begin{aligned}
 3) \int \sin^2 x dx &= \int \sin x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} f' = \sin x, f = -\cos x \\ g = \sin x, g' = \cos x \end{array} \right| = \\
 &= -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2 \int \sin^2 x dx &= -\sin x \cos x + x, \text{ def} \\
 \int \sin^2 x dx &= \underline{\underline{\frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + C, x \in \mathbb{R}}}
 \end{aligned}$$

E) integrate prvo! substitute

I. f spojita' $r(a, b)$, g' spojita' $r(\alpha, \beta)$, $g(\alpha, \beta) = (a, b)$:
 x -li $\int f(t) dt = F(t) + C$ $r(a, b)$, x'
 $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C, x \in (\alpha, \beta)$

Pr. 1) $\int_{x \in \mathbb{R}} \frac{-x^2}{e^{-2x}} dx = \left| \begin{array}{l} -x^2 = t \\ -2x dx = dt \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = \underline{\underline{\frac{-x^2}{e} + C}}$

2) $\int \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} 1+\sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \end{array} \right| = \int \ln t dt =$
 $= t \ln t - t + C = \underline{\underline{(1+\sqrt{x}) (\ln(1+\sqrt{x}) - 1) + C, x \in (0, +\infty)}}$

II. f x spojita' $r(a, b)$, g' spojita' $r(\alpha, \beta)$, $g' \neq 0$ $r(\alpha, \beta)$, $g(\alpha, \beta) = (a, b)$.
 g al, x -li $\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = G(t) + C, t \in (\alpha, \beta)$
 $\int f(x) dx = \underline{\underline{G(g^{-1}(x)) + C, x \in (a, b)}}$

Pr. 1) $\int_{x \in (-1, 1)} \sqrt{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ dx = \cos t dt \text{ (} \cos t > 0 \text{)} \\ t = \arcsin x \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt =$
 $= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} (t + \sin 2t) =$
 $= \underline{\underline{\frac{1}{2} (\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}) + C}}$

$$\begin{aligned}
 \text{Pr. } \int \frac{x-1}{x^2+4x+8} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} dx + (-3) \int \frac{1}{(x+2)^2+4} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+8) - \frac{3}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+8) - \frac{3}{4} \cdot 2 \arctg\left(\frac{x+2}{2}\right) + C, x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

2) „ukvod“ pro integraci racionalni funkce

$$\int \frac{f(x)}{q(x)} dx, \quad f(x), q(x) - \text{polynomy, } \text{st } q(x) \geq 1$$

(i) st $f(x) \geq \text{st } q(x)$, pak

$$\frac{f(x)}{q(x)} = \tilde{f}(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

kde $\text{st } \tilde{f} = \text{st } f - \text{st } q$ a
 $\text{st } r < \text{st } q$

(ii) st $f(x) < \text{st } q(x)$

$q(x)$ se rozdělí na součet
 lineárních činitelů, které
 odpovídají reálným kořenům
 a kvadratickým třícením,
 které nemají reálné kořeny

(iii) $\frac{f(x)}{q(x)}$ se rozdělí na součet
 zlomků algebry:

$$(x-a)^n \rightarrow \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

$n=1,2,\dots$

$$(x^2+px+q)^m \rightarrow \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \dots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}$$

$$\text{Pr. } \frac{x^4-3x^3+5x^2-2x+1}{x^3-3x^2+4x-2} = x + \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+4x-2}$$

(dekompozice)

$$q(x) = x^3-3x^2+4x-2 \text{ má kořen } a=1,$$

tedy

$$q(x) = (x-1)(x^2-2x+2),$$

polynom x^2-2x+2 nemá reálné
 kořeny

$$\text{zde! } \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+4x-2} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-2x+2)}$$

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

(iv) nespočet koeficientů
v rozkladu se musí metodou
neurčitých koeficientů

$$x^2+1 = A(x^2-2x+2) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x^2+1 = (A+B)x^2 + (-2A+C-B)x + 2A-C$$

$$\text{př. } x^2: \quad A+B = 1$$

$$x: \quad -2A+C-B = 0$$

$$x^0: \quad 2A - C = 1$$

$$\text{odpověď: } \underline{A=2, B=-1, C=3}$$

(v) dále integrace jednotlivých
parciálních zlomků

Teď: $\int \frac{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} dx = \int x dx + \int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+4x-2} dx =$

(ii), (iii) $\frac{x^2}{2} + \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{-x+3}{x^2-2x+2} dx =$

$$= \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x-1| + \left(-\frac{1}{2}\right) \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx + 2 \int \frac{1}{(x-1)^2+1} dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{x^2}{2} + 2 \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+2) + 2 \arctan(x-1) + C}}$$

$$x \in (-\infty, 1) \text{ nebo } x \in (1, +\infty)$$

G) Substituce, vedoucí ke integraci racionálních funkcí
($R(t)$ snová racionální funkce)

$$1) \int R(e^x) dx = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{1}{t} dt \end{array} \right| = \int R(t) \cdot \frac{1}{t} dt$$

Pr. $\int \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 2e^x + 2} dx = \int \frac{t-1}{t^2-2t+2} \cdot \frac{1}{t} dt = \dots$

$$2) \int R(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int R(t) dt = \dots$$

Pr. $\int \frac{\ln x}{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{t}{t^2 + 1} dt = \dots$

$$3) \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \\ \dots \end{array} \right| = \dots$$

Pr. $\int \frac{3\sqrt{x}+1}{x(x+2\sqrt{x}+2)} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{3t+1}{t^2(t^2+2t+2)} \cdot 2t dt = \dots$

$$4) \int_{a>0} R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm \sqrt{ax} \pm t \\ \text{(Eulerova substituce)} \\ x = \dots \\ dx = \dots \end{array} \right|$$

$$5) a) \int R(\sin x, \cos x) dx = \left| \begin{array}{l} \text{kg } \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi) \\ \text{nebo intervaly dle } R(t) \end{array} \right|$$

Pr. $\int \frac{1}{2+\cos x} dx = \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{1}{3+t^2} dt = \dots$

(Pozn.: $t \in (-\pi, \pi)$,
dále jež periodič a v každém $x = (2k+1)\pi$ je třeba
převést funkce "slepit")

b) $\int \frac{1}{\sin x} dx = -R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, (je R je hledá \sin a \cos),
že substituoval $\cos x = t$:

Pr. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = - \int \frac{dt}{1 - t^2} = \dots$

Podobně, pro $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (R je hledá \sin a \cos),
že substituoval $\sin x = t$:

c) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$,
že substituoval $\lg x = t$

(i pro $\int R(\lg x) dx$ - substituce $\lg x = t$)

Pr. 1) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \lg x = t \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \end{array} \right| = \left(\begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right)$
 $x \in (k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$
 $= \int \frac{1+t^2}{t^2} dt = \dots$

2) $\int \frac{1}{1+\lg x} dx = \left| \begin{array}{l} \lg x = t \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \end{array} \right| =$
 $x \in (\dots)$
 $= \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \dots$